Corrigé

1. Le trinôme au dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 > 0$, il admet donc deux racines réelles : 1 et –3. D'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

2. D'après le théorème de limite en l'infini des fonctions rationnelles, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. De plus $\lim\limits_{x \to -3} x^2+1+1 = 7$ et $\lim\limits_{x \to 1} x^2+1+1 = 3$ d'où, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

3. $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes verticales d'équation respective $x = -3$ et $x = 1$, et une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = 1$.

4. f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{x^2-8x-5}{(x^2+2x-3)^2}$. Comme le carré d'un nombre réel est toujours positif, f' est du signe de $x^2 - 8x - 5$ de discriminant $\Delta = 84 > 0$. Ce trinôme admet donc deux racines réelles distinctes : $4 - \sqrt{21}$ et $4 + \sqrt{21}$, et est négatif entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		$4-\sqrt{21}$		1		$4+\sqrt{21}$		$+\infty$
x^2-8x-5		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2+2x-3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(4-\sqrt{21})$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(4+\sqrt{21})$	$\nearrow$	1